

תרגיל 5 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. מצא את כל נקודות השבת של העתקת מוביוס $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
2. מצא העתקת מוביוס המעתיקה את חצי המישור הימני $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ לדיסק היחידה הפתוח $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.
3. האם קיימת העתקת מוביוס המעתיקה:
 - (א) את \mathbb{D} למישור המרוכב המורחב (הספירה של רימן)
 - (ב) את \mathbb{D} למישור המרוכב
 - (ג) את המישור המרוכב למישור המרוכב המורחב
4. הוכח שהנקודות z_1, z_2 סימטריות ביחס למעגל $\Gamma = \{z : Az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0\}$ כאשר $A \neq 0, A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}$ ו- $|B|^2 > AC$ אם ורק אם $Az_1\bar{z}_2 + Bz_1 + \overline{Bz_2} + C = 0$.
5. עבור אילו ערכים של $r \in \mathbb{R}$ תמונת המעגל $|z - 1| = r$ תחת העתקת מוביוס $f(z) = \frac{z-3}{1-2z}$ הינה ישר? מצא את משוואת הישר.
6. עבור אילו ערכים של $a \in \mathbb{R}$ ההעתקה $f(z) = \frac{z-1}{z-a}$ מקיימת $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$?